@RayanAzmoon

کد کنترل

462

F

462F

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

عصر پنج‌شنبه
۱۳۹۹/۵/۲

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ـ سال ۱۳۹۹

مجموعه علوم کامپیوتر ـ کد (۱۲۰۹)

تعداد سؤال: ۱۳۵ — مدت پاسخ‌گویی: ۲۴۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی(۱و۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۳۵	۳۱	۶۵
۳	ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه	۳۰	۶۶	۹۵
۴	مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها	۲۰	۹۶	۱۱۵
۵	ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات	۲۰	۱۱۶	۱۳۵

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب ..... با شمارهٔ داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شمارهٔ صندلی خود را با شمارهٔ داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچهٔ سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچهٔ سؤالات و پائین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

***Directions**: Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.*

1- **It had not rained on the prairie for several months. Because of the drought, the climate had become very ----------.**
1) unsteady 2) rigid 3) intense 4) arid

2- **Deserted for six months, the property began to look more like a jungle and less like a residence—weed grew ---------- in the front yard.**
1) unchecked 2) unjustified 3) complicated 4) scanty

3- **Can you please ---------- this last part of the lesson for me; I'm not sure I understood.**
1) recapitulate 2) identify 3) postulate 4) recount

4- **Gerry's dissatisfaction with our work was ---------- in his expression, although he never criticized us directly.**
1) vulnerable 2) bright 3) implicit 4) humble

5- **The world's coal, oil and gas ---------- are finite; one day they will run out, so think now about what you can do to consume less.**
1) appliances 2) deposits 3) relics 4) amenities

6- **You are recommended to use mnemonics to help you ---------- important items of information.**
1) enumerate 2) expose 3) recall 4) withdraw

7- **The lifespan of a mayfly is ----------, lasting from a few hours to a couple of days.**
1) imprecise 2) ephemeral 3) superficial 4) swift

8- **His words to the press were deliberately ----------; he didn't deny the reports but neither did he confirm them.**
1) mutual 2) essential 3) dogmatic 4) equivocal

9- **Hundreds of people had come to see a popular satire, but during the performance a fire started in the theater, and the audience and actors had to ---------- the building immediately.**
1) expel 2) evacuate 3) disperse 4) detach

10- **Computers have helped solve some of the mathematical ---------- which have puzzled man for many centuries.**
1) conundrums 2) caprices 3) artifacts 4) chronologies

PART B: Cloze Test

***Directions*: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the answer on your answer sheet.**

When Newton arrived at Cambridge, the Scientific Revolution of the 17th century was already in full force. The heliocentric view of the universe—theorized by astronomers Nicolaus Copernicus and Johannes Kepler, (11) ---------- refined by Galileo—was well known in most European academic circles.

Philosopher René Descartes had begun to formulate a new concept of nature (12) --------- an intricate, impersonal and inert machine. (13) ----------, like most universities in Europe, Cambridge was steeped (14) ---------- Aristotelian philosophy and a view of nature resting on a geocentric view of the universe, (15) ---------- with nature in qualitative rather than quantitative terms.

11-	1) and was later	2) and later	3) later was	4) which was later
12-	1) like	2) such as	3) as	4) the same
13-	1) Although	2) As though	3) Because	4) Yet
14-	1) in	2) for	3) with	4) of
15-	1) dealt	2) dealing	3) by dealing	4) and was dealt

PART C: Reading Comprehension

***Directions*: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.**

PASSAGE 1:

Perhaps the richest and most exciting area of application of the projection theorem is the area of statistical estimation. It appeals in virtually all branches of science, engineering, and social science for the analysis of experimental data, for control of systems subject to random disturbances, or for decision making based on incomplete information.

All estimation problems discussed in this chapter are ultimately formulated as equivalent minimum norm problems in Hilbert space and are resolved by an appropriate application of the projection theorem. This approach has several practical advantages but limits our estimation criteria to various forms of least squares. At the outset, however, it should be pointed out that there are a number of different least squares estimation procedures which as a group offer broad flexibility in problem formulation. The differences lie primarily in the choice of optimality criterion and in the statistical assumptions required. In this chapter three basic forms of least squares estimation are distinguished and examined.

Least squares is, of course, only one of several established approaches to estimation theory, the main alternatives being maximum likelihood and Bayesian techniques. These other techniques usually require a complete statistical description of the problem variables in terms of joint probability distribution functions, whereas least squares requires only means, variances, and covariances. Although a thorough study of estimation theory would certainly include other approaches as well as least squares, we limit our discussion to those techniques that are derived as applications of the projection theorem. In complicated, multivariable problems the equations resulting from the other approaches are often nonlinear, difficult to

solve, and impractical to implement. It is only when all variables have Gaussian statistics that these techniques produce linear equations, in which case the estimate is identical with that obtained by least squares. In many practical situations then, the analyst is forced by the complexity of the problem to either assume Gaussian statistics or to employ a least-squares approach. Since the resulting estimates are identical, which is used is primarily a matter of taste.

16- Least squares ----------.

1) has a limited application
2) is equivalent to a minimum norm problem
3) is the only practical approach to estimation theory
4) cannot be used for decision making based on incomplete information

17- Among several existing approaches to estimation theory, ---------- a complete statistical description of the problem variables.

1) only Bayesian technique needs
2) only maximum likelihood techniques need
3) both maximum likelihood and Bayesian techniques need
4) least squares, maximum likelihood and Bayesian techniques need

18- The projection theorem ----------.

1) can be effectively used to solve least squares problems
2) complicates estimation of certain parameters
3) provides a theoretical framework for estimation theory
4) cannot be appropriated to estimation theory

19- Considering Gaussian statistics for all the variables, the proposed alternative techniques ----------.

1) turn to be impractical
2) may produce nonlinear equations
3) result in the same estimate obtained by least squares
4) produce linear equations, from which an inappropriate estimate may be obtained

20- The word "resolved" in paragraph 2 is similar in meaning to ----------.

1) complicated
2) decided
3) solved again
4) solved iteratively

PASSAGE 2:

To put the idea of polynomial interpolation into a familiar framework, it is well-known, and perhaps obvious, that there is a unique straight line passing through any two points in the plane. This straight line is (the graph of) the linear, or first-degree, interpolating polynomial for this data, the coordinates of the two points. In precisely the same way it is easy to show that there is a unique parabola which passes through any three points: this is the graph of the quadratic, or second-degree, interpolating polynomial which agrees with the given data. In general, we will find that there is a unique polynomial of the minimum possible degree n which agrees with a given function at $n - 1$ data points, or *nodes*.

The drawbacks of this polynomial interpolation approach include the following. If the number of data points is large, then the degree of the interpolating polynomial will be high and therefore its evaluation will itself be computationally expensive. Second, few physical laws are of high-degree polynomial nature, and so the approximating function is likely to exhibit less stable behavior than the function or phenomenon being approximated. (Note that high-degree polynomials will often have many turning points, which is again untypical of

physical phenomena.) The use of a single interpolation polynomial over a wide range gives equal weight to function values distant from the point of interest as it does to those at nearby points.

It is likely to be more fruitful to use several lower-degree polynomials which utilize data at points close to the required one. This is achieved by the various difference schemes which we will discuss shortly or by the use of spline interpolation. The latter is based on the idea of a piecewise polynomial which interpolates the complete set of data but which is of low degree and therefore simple to evaluate in any subrange.

All these approaches and their associated errors are to be discussed in the next two chapters. We will see that the problem is often reduced to the necessity of solving a (sometimes large) system of linear equations.

Before proceeding to the details of any one interpolation scheme, it is necessary to point out one further difficulty which may arise in practice. If the data is itself the result of practical experiment and therefore subject to its own errors, then it is probably unwise to insist that any approximation scheme agrees exactly with this erroneous data. This is one of the primary motivations for the use of approximation algorithms rather than interpolation. The idea here is to find a function whose graph passes close to all the data points without necessarily fitting any of the data *exactly*.

21- There ---------- interpolating n+1 data points of a given function.

1) is exactly one function
2) is exactly one polynomial
3) are many polynomials of degree less than n
4) is exactly one polynomial of degree at most n

22- Polynomial interpolation of large number of data points is ---------- of the interpolating polynomial.

1) advised due to uniqueness
2) considered to be complicated despite the uniqueness
3) not useful because of the high degree
4) avoided due to the excessive computational requirement

23- Spline interpolation ---------- the complete set of data.

1) can make use of low degree polynomials to interpolate
2) making use of low degree polynomials, cannot interpolate
3) is considered to be a different scheme for interpolating
4) results in polynomials that are simple to evaluate but is inappropriate for

24- Approximating functions to data are preferred due to ----------.

1) errors in experimental data
2) errors in computational algorithms
3) a high degree of interpolating data
4) a high cost of the interpolating polynomials

25- Systems of linear equations ----------.

1) introduce errors in solving interpolation problems
2) arise from solving interpolation problems
3) correspond to error estimation in interpolating data
4) result in excessive error for computing interpolating polynomials

PASSAGE 3:

In our study of geometric modeling, we will make extensive use of several important mathematical techniques. The most important are: linear algebra, vectors, matrix methods, determinants, set theory, polynomial interpolation, and numerical approximation. Let us briefly review some of these.

Perhaps the single most important mathematical device we will use is the vector. We can think of vectors as conceptual entities in their own right, because they seem to fit our geometric intuition of displacement. This is easily obscured if we are limited to working only with their components separately.

Vectors offer a distinct advantage over classic analytic geometry by minimizing our dependence on a specific coordinate system. At the very least, vectors allow us to postpone the choice of a coordinate system until the later stages of the problem-solving process. Then we can often choose more appropriate coordinates than might have been evident earlier. In addition, vectors carry inherent geometric meaning, such as length and direction. Vector operations allow us to readily determine perpendicularity or parallelism. These operations support algebraic operations while retaining geometric meaning. Last, but not least, vector equations handle several component equations at once. Section 3.1 presents a review of vectors and vector geometry.

Next we turn to matrix methods. The array of numbers that makes up a matrix can represent simply an orderly way of storing numbers pertinent to some problem or perhaps a set of polynomial equation coefficients. The rules of matrix algebra define allowable operations on these arrays.

Another use of a matrix is as an operator. Here, the matrix performs a geometric transformation on a set of points by operating on the position vectors that define these points. The rules of allowable operations are in turn governed by the rules of matrix algebra. This interpretation of a matrix as a geometric operator is the foundation of most geometric-modeling computations.

Since we will encounter determinants in many operations and expressions in this book, it is a good idea to become reacquainted with their special properties.

Now let us look at polynomial interpolation. A great deal of practical numerical analysis depends on techniques called numerical interpolation. Here, we discover the powerful but simple theorem that a straight line can be defined by, and passed through, two points, a conic curve through three points, a cubic through four, and so on. We use polynomials for interpolation, because they can be evaluated, differentiated, and integrated easily and in a finite number of steps by using just the basic arithmetic operations of addition, subtraction, and multiplication.

26- Vector is an important mathematical device on geometric modeling because of its ----------.

1) geometric characteristics
2) representation of various individual entities
3) utility for linear algebraic operations
4) representation of a fixed coordinate system

27- For a matrix as a geometric operator, allowable operations are defined by ----------.

1) their geometric use
2) rules of matrix algebra
3) algebraic operations on arrays
4) aggregation of rules on vector manipulations

28- **Numerical interpolation makes use of polynomials due to ----------.**
1) a simple result that a line passes through two points
2) the fact that a conic curve can pass through three points
3) local properties as piecewise polynomials
4) their ease of computational use

29- **Piecewise interpolating polynomials are used to ----------.**
1) obtain the global influence of the underlying function
2) remove bad behavior of the underlying function
3) ease the differentiation and integration operations
4) avoid global influence imposed by a single interpolating polynomial

30- **Select the word that is closest in meaning to the underlined word, retaining, in the text.**
1) dropping 2) tolerating 3) keeping 4) transforming

دروس پایه (ریاضی عمومی(۱و۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- مقدار $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+e}{e}-\ln(x+e)\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e^2}$

۲) e

۳) $\frac{1}{e}$

۴) e^2

۳۲- برای تابع $f(x)=[x]+(x-[x])^{|x|}$ که $x\in(0,+\infty)$ کدام گزینه درست است؟ ($[.]$ نماد جزء صحیح است)

۱) صعودی هست پیوسته نیست.

۲) پیوسته هست صعودی نیست.

۳) پیوسته و صعودی است.

۴) صعودی نیست و پیوسته نیست.

۳۳- مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)!}$ کدام است؟

۱) $2e$

۲) $\frac{1}{2e}$

۳) $\frac{2}{e}$

۴) $\frac{e}{2}$

@RayanAzmoon

۳۴- اگر $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$ آنگاه مشتق مرتبهٔ ۱۰ تابع f در نقطهٔ $x=-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $-10!\times\left(\frac{4}{3}\right)^{10}$

۲) $\left(\frac{4}{3}\right)^{10}$

۳) $5!\times\left(\frac{4}{3}\right)^{6}$

۴) $-10!\times\left(\frac{4}{3}\right)^{6}$

۳۵- مقدار $\int_0^{\pi}\frac{3+3\sin x+2\cos x}{2+2\sin x+3\cos x}dx$، کدام است؟

۱) $\frac{10\ln 5-12\pi}{13}$

۲) $\frac{12\pi-10\ln 5}{13}$

۳) $\frac{12\pi+10\ln 5}{13}$

۴) $-\frac{10\ln 5+12\pi}{13}$

۳۶- ماکزیمم مقدار انحنای خم $C:\vec{\gamma}(t)=(2t-3)\vec{i}+(t-1)\vec{j}+t^2\vec{k}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$

۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{3}{5}$

۴) $\frac{4}{5}$

۳۷ اگر $z=f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}^2$ باشد که به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x+\sin 2x,x-\sin 2x)=x$ و $f(2x-\sin x,2x+\sin x)=\sin x$ آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{5}$

۲) $\frac{1}{5}$

۳) $-\frac{2}{5}$

۴) $\frac{2}{5}$

۳۸- خط مماس مشترک دورویهٔ $z = e^{x-y}$ و $x^۲ + y^۲ + ۲z^۲ = ۴$ در نقطه $(۱,۱,۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{۱} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z-۱}{۳}$

۲) $x-۱ = \frac{y-۱}{۳} = \frac{-z+۱}{۲}$

۳) $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۱}{۳} = \frac{-z+۱}{۲}$

۴) $\frac{x-۱}{۳} = \frac{y-۱}{۲} = z-۱$

۳۹- حجم ناحیه محدود به صفحهٔ $z = ۴$ و رویهٔ $z = (۲x-y)^۲ + (x+y-۱)^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۸\pi}{۳}$

۲) $\frac{۴\pi}{۳}$

۳) $\frac{۲\pi}{۳}$

۴) $\frac{\pi}{۳}$

۴۰- اگر $F(x,y,z) = (۳y, x^۲, \sqrt{x^۲+y^۲})$ و S قسمتی از رویه به معادله $x^۲ + y^۲ + z = ۱$ باشد که بالای صفحهٔ xoy قرار دارد و $\vec{n}$ بردار قائم یکه رو به بالای رویه S باشد، آنگاه مقدار $\iint_S \nabla \times F.nd\sigma$ کدام است؟

۱) -۳π

۲) $-\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $\frac{۳\pi}{۲}$

۴) ۳

۴۱- کدام گزینه زبان منطق گزارهٔ زیر است؟

هیچ عضو مجموعهٔ A، به مجموعه B تعلق ندارد.

۱) $\forall x(x \in A \wedge x \notin B)$

۲) $\forall x(x \in A \Rightarrow x \notin B)$

۳) $\exists x(x \in A \Rightarrow x \notin B)$

۴) $\sim \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$، که $\sim$ نماد نقیض است.

۴۲- فرض کنید R یک رابطه روی مجموعهٔ X باشد و $I = \{(x,x) | x \in X\}$. کدام گزینه درست است؟

۱) R متقارن و پادمتقارن است، اگر و تنها اگر $R \subseteq I$.

۲) رابطه‌ای وجود ندارد که هم متقارن و هم پادمتقارن باشد.

۳) اگر $I \subseteq R$، آنگاه R متقارن و پادمتقارن است، ولی عکس این گزاره لزوماً درست نیست.

۴) اگر R متقارن و پادمتقارن باشد، آنگاه $R \subseteq I$، ولی عکس این گزاره لزوماً درست نیست.

۴۳- فرض کنید X یک مجموعه و R یک رابطه روی X باشد. کدام گزینه شرط کافی برای بازتابی (انعکاسی) بودن رابطهٔ R است؟

۱) رابطه‌ای مانند S موجود باشد که $R = SoS^{-1}$ و S نیز یک تابع باشد.

۲) رابطه‌ای مانند S موجود باشد که $R = S^{-1}oS$ و S نیز یک تابع باشد.

۳) رابطهٔ R متقارن و متعدی باشد.

۴) رابطهٔ R متقارن و پادمتقارن باشد.

۴۴- با فرض آنکه هر عدد حقیقی در بازه $[0,1)$ یک بسط اعشاری دارد با این ویژگی که بی‌نهایت بار ارقامش ناصفر هستند. تابع $f:(0,1)\times(0,1]\to[0,1)$ را باضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(0/x_1\,x_2\,x_3\ldots\ ,\ 0/y_1\,y_2\,y_3\ldots) = 0/x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,x_3\,y_3\ldots$$

کدام گزینه درست است؟

۱) f دارای معکوس راست و معکوس چپ است.

۲) f دارای معکوس راست است ولی معکوس چپ ندارد.

۳) f معکوس راست و معکوس چپ ندارد.

۴) f دارای معکوس چپ است ولی معکوس راست ندارد.

۴۵- فرض کنید $\mathrm{card}\mathbb{N} = \aleph_0$ و $\mathrm{card}\mathbb{R} = c$ که $\mathbb{N}$ نمایش اعداد طبیعی و $\mathbb{R}$ نمایش اعداد حقیقی است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $c^{\aleph_0} = c$

۲) $2^{\aleph_0} = c$

۳) اگر $n > 2$، آنگاه $c^n \neq c$ و $\aleph_0^n \neq \aleph_0$

۴) $\aleph_0^{\aleph_0} = c$ (در صورت پذیرش فرض پیوستار)

۴۶- مقدار k چه باشد، که دستگاه معادلات خطی زیر یک جواب منحصر به فرد داشته باشد؟

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

۱) $\mathbb{R} - \{1,2\}$ ۲) $k = 2\ ,\ k = 1$

۳) $\mathbb{R} - \{2\ ,-1\}$ ۴) $k = -1, k = 2$

۴۷- اگر $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ طوری باشند که ماتریس A با ماتریس $(B^{-1})^t$ متشابه باشد، آنگاه کدام دو ماتریس زیر با هم متشابه هستند؟

۱) ماتریس‌های A^{-1} و B^{-1} ۲) ماتریس‌های A و B

۳) ماتریس‌های $(A^{-1})^t$ و B ۴) ماتریس‌های $(A^{-1})^t$ و $(B^{-1})^t$

۴۸- ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۱ & ۵ & ۲\\ -۲ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x)=\det(xI-A)$ چند جمله‌ای مشخصه این ماتریس باشد، مقدار $f(۰)$ برابر کدام است؟

۱) -۳۶ ۲) -۴۹ ۳) ۳۶ ۴) ۴۹

۴۹- فرض کنید $X^۲-۲X+I=۰$ که در آن X یک ماتریس ۲×۲ و I ماتریس همانی است. کدام گزینه درست است؟

۱) معادله دارای بی‌نهایت جواب است.

۲) $X=\begin{bmatrix}۲ & \frac{۱}{۲}\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$ تنها جواب معادله است.

۳) $X=\begin{bmatrix}۲ & \frac{۱}{۲}\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ تنها جواب معادله‌اند.

۴) $X=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ تنها جواب معادله‌اند.

۵۰- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$، آنگاه $\operatorname{tr}(A^{۱۴۰۰})$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۴۰۰}-۵^{۱۴۰۰}$ ۲) $-۲^{۱۴۰۰}+۵^{۱۴۰۰}$

۳) $۲^{۱۴۰۰}+۵^{۱۴۰۰}$ ۴) $-۲^{۱۴۰۰}-۵^{۱۴۰۰}$

۵۱- فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر و f' روی $[a,b]$ پیوسته باشد. هرگاه $a_n=\int_a^b f(x)\sin(nx)dx$، کدام گزینه درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n=۰$

۲) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n=b-a$

۳) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n=f(b)-f(a)$

۴) $\{a_n\}$ واگراست.

۵۲- فرض کنید $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ دنباله‌هایی کراندار از اعداد حقیقی باشند. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^۲$ موجود باشد، $\limsup(x_n^۲+y_n^۲)=\limsup x_n^۲+\limsup y_n^۲$

۲) $\liminf(x_n^۲+y_n^۲)\le\liminf x_n^۲+\liminf y_n^۲$

۳) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ موجود باشد و $\liminf(x_n^۲+y_n^۲)=\limsup x_n^۲+\limsup y_n^۲$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^۲$ موجود است.

۴) $\limsup(x_n^۲+y_n^۲)\le\limsup x_n^۲+\limsup y_n^۲$

۵۳- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\cos x}{2+\sin x}$ تعریف شده، کدام گزینه درست است؟

۱) f تابعی صعودی است.

۲) f تابعی نزولی است.

۳) f تابعی یکنواخت پیوسته است.

۴) f فقط بر زیر مجموعه‌های فشردهٔ $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

۵۴- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ یک تابع و D مجموعه نقاط ناپیوستگی f باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) D در $\mathbb{R}$ باز است.

۲) D حداکثر شمار است.

۳) D کراندار است.

۴) D در $\mathbb{R}$ بسته است.

۵۵- فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=x^n+x-1$ تعریف شده باشد که در آن $n\in\mathbb{N}$، کدام گزینه درست است؟

۱) f دقیقاً n ریشه حقیقی دارد.

۲) اگر $n\geq 3$ آنگاه f حداقل سه ریشه حقیقی دارد.

۳) اگر n زوج باشد f دقیقاً دو ریشه حقیقی و اگر n فرد باشد f دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

۴) اگر n زوج باشد f ریشه حقیقی ندارد و اگر n فرد باشد آنگاه f دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

۵۶- فرض کنید $\bar{x}$ تقریبی برای x است که آزمون روبه‌رو را برقرار می‌سازد: $\|x-\bar{x}\|\leq 10^{-10}+10^{-5}\|x\|$.

اگر مقدار x از مرتبه عدد یک باشد، دراین صورت تعداد ارقام دهدهی یکسان در x و $\bar{x}$ تقریباً برابر با کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۵۷- مسئله کم‌ترین مربعات خطی را به صورت $\min_x \|px-q\|_2$ در نظر بگیرید. جواب این مسئله برابر با کدام است؟ (p و q هر دو بردار هستند.)

۱) p^Tq/p^Tp ۲) p^Tp/p^Tq ۳) q^Tq/p^Tp ۴) p^Tp/q^Tq

۵۸- اگر در یک دستگاه خطی داده شده به صورت $Ax=b$، x و $\hat{x}$، جواب‌های به‌دست آمده به ازای بردارهای طرف راست تقریبا برابر b و $\hat{b}$، از یک‌دیگر دور باشند، آن‌گاه دستگاه مربوط چه نام دارد؟

۱) ناسازگار ۲) خوش‌حالت ۳) بدحالت ۴) ناپایدار

۵۹- در جدول روش رامبرگ برای انتگرال معین، فرض کنیدخطای برشی یک ستون ثابت k از مرتبه h^p است. در این صورت، مرتبه‌های خطای برشی روی ستون‌های $k+1$ و $k-1$ به ترتیب برابر با کدام است؟

۱) $p+1$ و $p-1$ ۲) $2p$ و $\frac{p}{2}$ ۳) p^2 و $p^{\frac{1}{2}}$ ۴) $p+2$ و $p-2$

۶۰- فرض کنید توابع پایه $\varnothing_1(x)$، ...، $\varnothing_n(x)$ نسبت به داده (x_i,y_i)، $i=1,...,n$، دوبه‌دو متعامد هستند. چند جمله‌ای درون‌یاب به صورت $f(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j\varnothing_j(x)$ به داده‌ها مدنظر است. a_1، ...، a_n را می‌توان از حل کدام دستگاه به‌دست آورد؟

۱) بالا مثلثی و نه لزوماً قطری ۲) تکین (وارون ناپذیر)

۳) پایین مثلثی و نه لزوماً قطری ۴) قطری و ناتکین (وارون پذیر)

۶۱- راننده‌ای $\frac{۱}{۴}$ مسیری را با سرعت ۶۰، $\frac{۱}{۶}$ این مسیر را با سرعت ۵۰ و بقیه مسیر را با سرعت ۷۰ کیلومتر بر ساعت طی کرده است. میانگین سرعت راننده در این مسیر کدام است؟

۱) $\frac{۷۷۰}{۱۲}$

۲) $\frac{۷۷۰}{۱۹}$

۳) $\frac{۷۲۰}{۱۲}$

۴) $\frac{۱۲۰۰}{۱۹}$

۶۲- احمد سکه سالمی را ۱۱ بار و بهرام همان سکه را ۱۰ بار پرتاب می‌کند. احتمال اینکه تعداد شیرهایی که احمد آورده است بیشتر از تعداد شیرهای بهرام باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۲}$

۲) $\frac{۱۰}{۲۲}$

۳) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۴) $\frac{۱۰}{۲۱}$

۶۳- دستگاهی دو مؤلفه دارد. شانس خراب شدن مؤلفه اول ۱۰ درصد است. اگر مؤلفه اول خراب شود شانس خراب شدن مؤلفه دوم ۲۰ درصد است. اما اگر مؤلفه اول کار کند شانس خراب شدن مؤلفه دوم ۵ درصد است. احتمال اینکه دقیقاً یکی از مؤلفه‌ها کار کند چقدر است؟

۱) ۰/۷۲۵

۲) ۰/۳

۳) ۰/۲۵

۴) ۰/۱۲۵

۶۴- تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید و تاس B دارای ۴ وجه سفید و ۲ وجه قرمز است. سکه‌ای سالم را پرتاب می‌کنیم، اگر نتیجه شیر آمد بازی را با تاس A و اگر خط آمد بازی را با تاس B شروع می‌کنیم. اگر نتیجه دو پرتاب اول قرمز باشد، احتمال اینکه پرتاب سوم قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

@RayanAzmoon

۶۵- هر خانه شطرنج را می‌توان با زوج مرتب (i,j) که در آن $i,j=1,2,...,8$ است مشخص کرد. دو خانه از شطرنج به تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال این‌که دو خانه انتخابی دارای یک ضلع مشترک باشند کدام است؟

۱) $\frac{5}{18}$

۲) $\frac{1}{18}$

۳) $\frac{2}{64}$

۴) $\frac{1}{64}$

ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه:

۶۶- زمان اجرای قطعه کد مقابل، از چه مرتبه‌ای است؟

```
i = 2;
while(i ≤ n)
{
 write(*);
 i = i*i;
}
```

۱) $O(n^2)$ ۲) $O(\log n)$ ۳) $O(n\log n)$ ۴) $O(\log\log n)$

۶۷- مرتبه زمانی الگوریتم **f2** کدام است؟

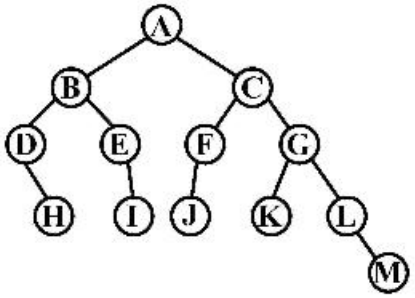
```
f1(n)
{
 for(x = 0 , i = 0 ; i < n;i++)
        x++
 return(x)
}
f2(n)
{
    if(n == 0) return(0)
    else return f2(n/2)+f1(n)+f2(n/2)
}
```

۱) $O(n)$ ۲) $O(n^2)$ ۳) $O(n\log n)$ ۴) $O(n\log^2 n)$

۶۸- در یک درخت جستجوی باینری، الگوریتم یافتن **median** دارای چه مرتبه زمانی است؟

۱) $O(n)$ ۲) $O(\frac{n}{2})$ ۳) $O(\log n)$ ۴) $O(n\log n)$

۶۹- در درخت AVL زیر با حذف کدام گره درخت هنوز AVL باقی می‌ماند؟



۱) H
۲) I
۳) J
۴) K

۷۰- کدام‌یک از ساختار داده‌های زیر پیچیدگی زمانی حداقل مشابه با هرم مینیمم برای درج و حذف یک عنصر را دارد؟

۱) درخت AVL
۲) جدول درهم
۳) آرایه مرتب‌شده
۴) لیست پیوندی مرتب‌شده

۷۱- فرض کنید می‌خواهیم کمترین تعداد ضرب عددی ممکن برای محاسبه ضرب $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ را با استفاده از روش برنامه‌نویسی پویا (Dynamic programming) پیدا کنیم. برای این‌کار لازم است از یک جدول $n \times n$ استفاده کنیم. کدام گزینه تعداد خانه‌های استفاده شده از این جدول $n \times n$ را برای پیدا کردن تعداد ضرب بهینه نشان می‌دهد؟

۱) n
۲) n^2
۳) $\frac{n(n-1)}{2}$
۴) $\frac{n(n+1)}{n}$

۷۲ فرض کنید می‌خواهیم یک آرایه ۱۰ عنصری را با استفاده از الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی، مرتب کنیم. چند مورد از موارد زیر صحیح است؟

(I) تعداد فراخوانی تابع merge در این الگوریتم ۱۹ است.

(II) تعداد فراخوانی‌های بازگشتی برابر با ۹ است.

(III) حداکثر تعداد مقایسه‌ها بین عناصر آرایه ۲۵ تا است.

۱) ۱مورد
۲) ۲ مورد
۳) ۳ مورد
۴) هیچ‌کدام

۷۳- الگوریتم زیر برای مرتب‌سازی یک آرایه n عنصری از اعداد ۱، ۰ و ۱- است. به‌جای ..... چه دستوری باید قرار گیرد؟

```
sort(A)
{
  i = 0 ; j = 0 ; h = n + 1 ;
  while(h! = j + 1)
     if(A[j + 1] = = -1)
              A[j+1] ↔ A[i+1]
             .....
     else if (A[j+1] == 0)
                j = j + 1
     else
          A[j + 1] ↔ A[h - 1]
          h = h - 1
}
```

۱) h = h − ۱, i = i + ۱
۲) h = h − ۱, j = j + ۱
۳) j = j + ۱, i = i + ۱
۴) j = j − ۱ , i = i − ۱

۷۴- کدام‌یک از جملات زیر صحیح است؟

۱) در هر الگوریتم تصادفی بدترین زمان اجرا و زمان اجرای متوسط با یک فاکتور ثابت با هم برابرند.

۲) در یک گراف متصل وزن‌دار، یالی با ماکزیمم وزن هیچ وقت در درخت پوشای مینیمم نخواهد بود.

۳) در هر مسئله برنامه‌ریزی پویا که خاصیت بهینه بودن زیر ساختارها را داشته باشد، هر جواب بهینه محلی آن جواب بهینه سراسری نیز است.

۴) فرض کنید S یک مجموعه n عنصری از اعداد صحیح است. می‌توان یک ساختار داده‌ای برای S طراحی کرد که تست عضویت در آن در بدترین حالت در $O(1)$ انجام شود.

۷۵- فرض کنید الگوریتم بلمن ـ فورد (Bellman-Ford) برای محاسبه کوتاه‌ترین مسیر تک منبعی در یک گراف وزن‌دار تقریباً کامل استفاده شده است. مرتبه زمانی آن چقدر است؟ (v نشان‌دهنده تعداد گره‌ها و c نشان‌دهنده تعداد یال‌هاست.)

۱) $O(v^2)$ ۲) $O(v^3)$

۳) $O(v \log v)$ ۴) $O(v^2 \log c)$

۷۶- مرتبه زمانی محاسبه رابطه روبه‌رو کدام است؟

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

۱) $\theta(1)$ ۲) $\theta(n)$

۳) $\theta(n^2)$ ۴) $\theta(n^4)$

۷۷- فرض کنید تمام توابع $\log$ در این سؤال بر مبنای ۲ هستند و تعریف تابع $\log^*$ به شرح زیر است:

$$\log^* n = \min\{i \geq 0 : \log^{(i)} n \leq 1\}$$

ترتیب توابع زیر را براساس نرخ رشد (از کمترین نرخ رشد به بیشترین نرخ رشد) از چپ به راست کدام است؟

$$2^{\log^*(\log n)} \ , \ n^{1/5} \ , \ n^{\frac{1}{\log n}}$$

۱) $n^{1/5} < n^{\frac{1}{\log n}} < 2^{\log^*(\log n)}$

۲) $n^{\frac{1}{\log n}} < n^{1/5} < 2^{\log^*(\log n)}$

۳) $n^{\frac{1}{\log n}} < 2^{\log^*(\log n)} < n^{1/5}$

۴) $2^{\log^*(\log n)} < n^{1/5} < n^{\frac{1}{\log n}}$

۷۸- فرض کنید یک متن فارسی به شما داده شده است که فقط ۳۳ کاراکتر در آن ظاهر شده‌اند (۳۲ کاراکتر الفبای فارسی به‌علاوه کاراکتر فاصله). نتیجه شمارش فراوانی این ۳۳ کاراکتر در این متن نشان می‌دهد که فراوانی آن‌ها از فرمول فیبوناچی پیروی می‌کند. به عبارت دیگر، فراوانی کاراکتر اول ۱، کاراکتر دوم ۱، کاراکتر سوم ۲، کاراکتر چهارم ۳، کاراکتر پنجم ۵، کاراکتر ششم ۸ و ... است. اگر بخواهیم کاراکترهای موجود در این متن را با الگوریتم هافمن کد کنیم، طول بزرگترین کد چند رقم خواهد بود؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۳۱ ۴) ۳۲

۷۹- آرایه‌ای به طول n داریم که $n-k$ عنصر آن مرتب و k عنصر آن نامرتب هستند. اگر k خیلی کوچک‌تر از n باشد آنگاه کدام الگوریتم مرتب‌سازی دارای بهترین کارایی برای مرتب کردن آن است؟

۱) Heap ۲) Merge ۳) Insertion ۴) Selection

۸۰- اگر هزینه f(m) و g(m) برابر θ(m) باشد، هزینه h(n) چقدر است؟

```
h(n)
{
  p = ۱
  for(i = ۱ ; i <= n ; i++) {
          f(i)
          if(i == p){
              g(n)
              p = p × ۲
          }
  }
}
```

۱) $\theta(n)$ ۲) $O(n^2)$ ۳) $\theta(n\log n)$ ۴) $O(n^2\log n)$

۸۱- فرض کنید تابعی برای محاسبهٔ x^n (توان) ندارید و می‌توانید از چهار عنصر اصلی استفاده کنید. x یک عدد دلخواه و n یک عدد طبیعی است. بهترین زمانی‌که می‌توانید در آن، x^n را محاسبه کنید، کدام است؟

۱) $O(n)$ ۲) $O(\log n)$
۳) $O(\log\log n)$ ۴) $O(\log n \log x)$

۸۲- کدام‌یک از مسائل زیر دارای پیچیدگی محاسباتی چند جمله‌ای است؟

۱) کوله‌پشتی کسری ۲) کوله‌پشتی صفر و یک
۳) فروشنده دوره‌گرد با وزن صحیح ۴) کوله‌پشتی کسری و کوله‌پشتی صفر و یک

۸۳- متنی شامل حروف a , b, c, d, e, f با فراوانی‌های زیر داده شده است. اگر این حروف را طبق کد هافمن کدگذاری کنیم تعداد بیت‌های f و a به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

حروف	a	b	c	d	e	f
فراوانی	۳۰	۱۰	۷	۸	۴۰	۱۴

۱) ۳ , ۲ ۲) ۴ , ۲ ۳) ۴ , ۳ ۴) ۲ , ۴

۸۴- الگوریتم خرد کردن پول با روش حریصانه برای وقتی‌که بخواهیم ۱۴ واحد پول را از طریق سکه‌های {۱۰ , ۷ , ۲ , ۱} واحد خرد کنیم، چند سکه به‌دست می‌دهد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۸۵- در مورد الگوریتم فلوید (برای محاسبه کوتاه‌ترین مسیر در گراف وزن‌دار) کدام گزینه صحیح است؟

۱) همواره جواب صحیح را گزارش می‌کند.
۲) می‌تواند یال‌های با وزن منفی را پیدا و گزارش کند.
۳) اگر گراف دارای یال منفی باشد، جواب نادرست می‌دهد.
۴) اگر گراف به‌صورت درخت داده شده باشد، درست عمل می‌کند.

۸۶- فرض کنیم L_1 و L_2 زبان‌های منظم باشند. کدام مورد برای زبان $L = \{w : w \in L_1, w^R \in L_2\}$ صحیح است؟

۱) منظم است.

۲) منظم نیست ولی مستقل از متن است.

۳) منظم نیست ولی گرامر خطی برای آن وجود دارد.

۴) منظم نیست ولی گرامر خطی راست برای آن وجود دارد.

۸۷- کدام عبارت در زبان تولید شده توسط عبارت منظم $r = (aa)^* b(bb)^* + a(aa)^*(bb)^*$ قرار ندارد؟

۱) a^2b^3

۲) ab^2

۳) b^3

۴) a^2b^2

۸۸- فرض کنید $L = (01^* \circ 1^+)^*$ و $L' = ((0+00)1^+)^*$، کدام گزینه درست است؟

۱) $L = L'$

۲) $L \subsetneq L'$

۳) $L' \subsetneq L$

۴) $L' \subsetneq L , L \subsetneq L'$

۸۹- L یک زبان منظم است. کدام‌یک از زبان‌های زیر لزوماً مستقل از متن است؟

$L' = \{ww^R w \mid w \in L\}$

$L'' = \{ww^R u \mid w, u \in L\}$

۱) فقط L'

۲) فقط L''

۳) L' و L'' هر دو

۴) هیچ‌کدام

۹۰- کدام‌یک از زبان‌های زیر مستقل از متن است؟

۱) $\{ww^R w : w \in \{0,1\}^*\}$

۲) $\{0^i 1^j 0^i : i \le j\}$

۳) $\{0^{2n} 1^{3n} 0^n : n \ge 0\}$

۴) $\{w \in \{0,1\}^*$: طول w فرد و نماد وسطی w برابر 0 است $\}$

۹۱- گرامر G با قوانین تولید $S \to aSbb \mid aaSbbb \mid \lambda$ مفروض است. کدام عبارت در $L(G)$ قرار دارد؟

۱) $a^{1399} b^{2020}$

۲) $a^{1399} b^{3020}$

۳) $a^{2020} b^{4020}$

۴) $a^{2020} b^{3020}$

@RayanAzmoon

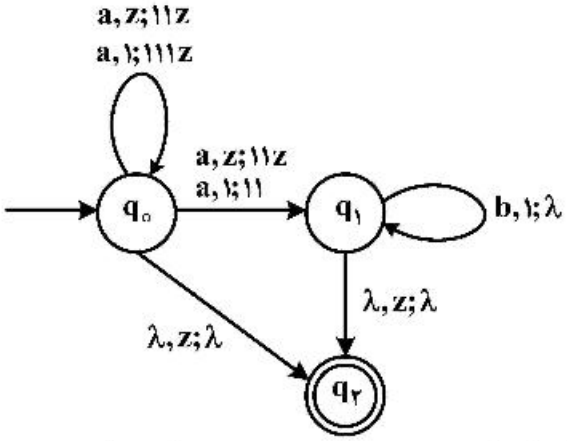
۹۲- فرض کنید L زبان همه رشته‌هایی با الفبای $\{۱ , ۰\}$ است که تعداد صفرهایشان زوج است. زبان کدام‌یک از گرامرهای زیر برابر با L است؟

الف- $S \to ۱S \mid ۰S۰ \mid \varepsilon$

ب- $S \to ۱S \mid ۰T۰S \mid \varepsilon$, $T \to ۱T \mid \varepsilon$

۱) فقط الف
۲) فقط ب
۳) الف و ب هر دو
۴) هیچ‌کدام

۹۳- npda با گراف انتقال زیر را درنظر می‌گیریم. کدام رشته در زبان این اتوماتای پشته‌ای قرار دارد؟ ($\alpha , \beta ; \omega$ یعنی در شرایطی که نماد بالایی پشته β است و α از ورودی خوانده می‌شود، رشته ω در پشته جایگزین β می‌شود.)



۱) $a^۳b^۴$
۲) $a^۳b^۵$
۳) $a^۳b^۶$
۴) $a^۳b^۷$

۹۴- دو تغییر زیر را روی هد (head) ماشین‌های تورینگ استاندارد اعمال و دو نوع ماشین جدید تعریف می‌کنیم:
نوع اول: در هر حرکت (هر انتقال) مکان هِد بتواند ثابت باشد، یک خانه به راست یا یک خانه به چپ حرکت کند.
نوع دوم: هِد در حداکثر یک حرکت بتواند به سمت چپ (رو به ابتدای نوار) و به تعداد دلخواه به سمت راست حرکت کند.
مجموعه زبان‌های دو نوع بالا به‌ترتیب عبارت است از مجموعه زبان‌های:
۱) تورینگ محاسبه‌پذیر ـ منظم
۲) تورینگ محاسبه‌پذیر ـ مستقل از متن
۳) تورینگ محاسبه‌پذیر ـ تورینگ محاسبه‌پذیر
۴) هیچ‌کدام

۹۵- L , L' دو زبان هستند. چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟
- اگر L تصمیم‌پذیر باشد و $L \preceq L'$ آن‌گاه L' تصمیم‌پذیر است.
- اگر $L \preceq L'$ و $L' \preceq L$ آن‌گاه $L = L'$.
- اگر $L \neq \phi , \Sigma^*$ آن‌گاه $L \preceq L^c$. (L^c زبان مکمل L است.)
توضیح نماد $\preceq$: برای دو زبان A و B می‌نویسیم $A \preceq B$ هرگاه A تقلیل‌پذیر تورینگی به B باشد.
۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها:

۹۶- فرض کنید A یک مجموعه ناتهی و R و S دو رابطه هم‌ارزی روی A باشند و R^{-1} و S^{-1} نیز به‌ترتیب رابطه‌های وارون R و S باشند، در آن صورت کدام عبارت صحیح است؟

۱) $R \cap S$ یک رابطه هم‌ارزی روی A است.

۲) $R \cup S$ یک رابطه هم‌ارزی روی A است.

۳) $R^{-1} \cup S^{-1}$ یک رابطه هم‌ارزی روی A است.

۴) $R - S$ (تفاضل دو مجموعه) یک رابطه هم‌ارزی روی A است.

۹۷- جدول ارزش‌ها را برای $[(p \to q) \to (r \to s)] \to u$ تشکیل داده‌ایم. چه تعداد ۱ در ستون آخر آن دیده می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۹۸- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر شمارای نامتناهی است؟

۱) مجموعه همهٔ دنباله‌های متناهی از اعداد گویا

۲) مجموعه همهٔ دنباله‌های اعداد طبیعی

۳) مجموعه همهٔ دنباله‌های ثابت از اعداد حقیقی

۴) مجموعه همهٔ دنباله‌های دودویی (متشکل از اعداد ۰ و ۱)

۹۹- فرض کنید $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح باشد. آن‌گاه مجموعه زیر مجموعه‌های متناهی $\mathbb{Z}$، ...

۱) یک مجموعه ناشمارا است.

۲) یک مجموعه هم‌توان با $\mathbb{Z}$ است.

۳) یک مجموعه هم‌توان با مجموعه زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ است.

۴) یک مجموعه هم‌توان با مجموعه زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{Z}$ است.

۱۰۰- گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

x دارای دم است $= T(a)$

x y را گاز می‌گیرد $= B \times y$

x y را دوست دارد $= L(x, y)$

x یک گربه است $= C(x)$

x یک سگ است $= D(x)$

در آن‌صورت ترجمه فارسی گزارهٔ زیر به‌صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

$$\exists x\big[C(x) \wedge \forall y\big[D(y) \wedge \neg T(y) \to B(y, x) \wedge \neg L(y, x)\big]\big]$$

۱) گربه‌ای موجود است که تمام سگ‌هایی که دُم ندارند، آن را گاز می‌گیرند و او را دوست ندارند.

۲) گربه‌ای موجود است که تمام سگ‌های بی‌دُم که آن را گاز می‌گیرند، آن گربه را دوست ندارند.

۳) وجود یک گربه مستلزم این است که تمام سگ‌هایی که دُم ندارند آن گربه را دوست نداشته باشند و یا آن را گاز بگیرند.

۴) گربه‌ای موجود است که اگر سگی آن گربه را گاز بگیرد و آن را دوست نداشته باشد، آن‌گاه آن سگ بی‌دُم است.

۱۰۱- تعداد گزاره‌های ناهم‌ارز که تنها شامل P_1, P_2, P_3 باشد و از نماد منطقی $\leftrightarrow$ استفاده شود کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱ ۴) ۱۶

۱۰۲- اگر α و β و γ اعداد اصلی (cardinal) باشند، آنگاه:

۱) $\alpha<\beta\Rightarrow\alpha+\gamma<\beta+\gamma$ ۲) $\alpha<\beta\Rightarrow\gamma^{\alpha}<\gamma^{\beta}$

۳) $\alpha\beta=1\Rightarrow(\alpha=1\ \&\ \beta=1)$ ۴) $\alpha<\beta\Rightarrow\alpha^{\gamma}<\beta^{\gamma}$

۱۰۳- نقیض گزارهٔ $\forall\varepsilon\sim\exists\delta\forall x\sim\forall y(x^2+y^2<\varepsilon+\delta)$ کدام است؟ (در اینجا $\sim$ نماد نقیض است و ε و δ مقید به اعداد مثبت هستند و x و y اعداد حقیقی می‌باشند.)

۱) $\sim\forall\varepsilon\forall\delta\exists x\forall y(x^2+y^2<\varepsilon+\delta)$ ۲) $\exists\varepsilon\sim\forall\delta\exists x\sim\exists y(x^2+y^2\geq\varepsilon+\delta)$

۳) $\exists\varepsilon\exists\delta\forall x\exists y(x^2+y^2\geq\varepsilon+\delta)$ ۴) هر سه مورد صحیح است.

۱۰۴- کدام‌یک از جملات زیر در منطق مرتبه اول راست می‌باشد؟

۱) $\forall x\exists yA(x,y)\rightarrow\exists y\forall xA(x,y)$ ۲) $\exists x\exists yA(x,y)\rightarrow\exists x\forall yA(x,y)$

۳) $\exists x\exists yA(x,y)\rightarrow\forall x\forall yA(x,y)$ ۴) $\exists x\forall yA(x,y)\rightarrow\forall y\exists xA(x,y)$

۱۰۵- چه تعداد از فرمول‌های گزاره‌ای زیر، قضیه‌ای از منطق گزاره‌ای نیستند؟

الف) $(\sim A\rightarrow A)\rightarrow A$

ب) $A\rightarrow(\sim A\rightarrow B)$

ج) $\big((\sim B\rightarrow\sim A)\rightarrow A\big)\rightarrow\big((\sim B\rightarrow A)\rightarrow B\big)$

د) $(A\rightarrow B)\rightarrow A$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۶- اگر فرض کنیم Λ یک مجموعه شمارش‌پذیر نامتناهی باشد. آنگاه $P(\Lambda)$ (مجموعه تمام زیرمجموعه‌های Λ) .....

۱) یک مجموعه متناهی است.

۲) یک مجموعه شمارش‌پذیر است.

۳) یک مجموعه شمارش‌ناپذیر است.

۴) تعداد عناصر $P(\Lambda)$ با تعداد عناصر یک زیرمجموعه نامتناهی از Λ برابر است.

۱۰۷- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) برای هر مجموعه Λ داریم $\Lambda\cap P(\Lambda)=\phi$

۲) اگر $A\subseteq P(A)$ آنگاه Λ نامتناهی است.

۳) مجموعه Λ وجود دارد که $P(A)$ شمارای نامتناهی است.

۴) A نامتناهی است اگر و تنها اگر $P(A)$ ناشمارا باشد.

۱۰۸- فرض کنید Γ مجموعه‌ای از گزاره‌های منطق گزاره ای باشد. حداکثر چند تا از احکام زیر با هم معادلند؟

- Γ سازگار ماکسیمال است.
- Γ تنها یک مدل دارد.
- برای هر گزارهٔ A، $\Gamma\vdash A$ یا $\Gamma\vdash\neg A$
- برای هر گزارهٔ A,B، اگر $\Gamma\vdash A\vee B$ آنگاه $\Gamma\vdash A$ یا $\Gamma\vdash B$
- Γ سازگار است و برای هر A,B، اگر $\Gamma\vdash A\rightarrow B$ آنگاه $\Gamma\vdash B$ یا $\Gamma\vdash A$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰۹- با فرض اینکه T_1 و T_2 دو نظریه سازگار در زبان L در منطق مرتبهٔ اول باشند، کدام مورد صحیح است؟

۱) $T_1 \cup T_2$ مدل دارد.

۲) $T_1 \cup T_2$ سازگار است.

۳) $T_1 \cap T_2$ سازگار است.

۴) $T_1 \cap T_2$ در هر مدلی راست است.

۱۱۰- تعداد موارد آزاد متغیرها در فرمول $\exists y \forall x D(x,y) \wedge \exists x (A(x,y) \wedge \forall z (B(x) \rightarrow D(x,w))$ برابر با کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۱- فرض کنید P، Q و R سه گزاره هستند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $P \rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$

۲) $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

۳) $(P \vee Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$

۴) $(P \wedge Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$

۱۱۲- کدام‌یک از ویژگی‌های زیر متناهی بودن مجموعه A را نتیجه می‌دهد؟ (برای مجموعه A، $|A|$ عدد اصلی A و $P(A)$ مجموعه توانی A می‌باشند.)

۱) $|A| < |A \cup \{A\}|$

۲) $|A| < |P(A)|$

۳) $|P(A)| = 2^{|A|}$

۴) $|P(A)| < |P(A \times A)|$

۱۱۳- فرض کنید A و B دو مجموعه نامتناهی باشند و $|B| < |A \cup B|$. چه تعداد از موارد زیر نتیجه قطعی فرض‌های مسئله‌اند؟

الف) A ناشمارا است.

ب) B شمارا است.

ج) $|B| < |A|$

د) $2^{|B|} \leq 2^{|A|}$

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۱۱۴- فرض کنید $P(X)$ نشان‌دهندهٔ مجموعه زیرمجموعه‌های X و دو مجموعه A و B ناتهی باشند، کدام مورد صحیح است؟

۱) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

۲) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

۳) $P(A \cup B) \cap P(A \cap B) = P(A) \cup P(B)$

۴) $P(A \cup B) = (P(A) \cup P(B)) \cap P(A \cap B)$

۱۱۵- روی مجموعه اعداد طبیعی، رابطه «عدد x عدد y را عاد می‌کند» یک رابطه .....

۱) ترتیب جزیی است. ۲) ترتیب کلی است.

۳) ترتیب نیست. ۴) هم‌ارزی است.

ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات:

۱۱۶- در یک گروه ۹۹ نفره، بین هر پنج نفر دو نفر هم‌سن هستند و بین هر ۴ نفر، دو نفر هستند که در یک شهر متولد شده‌اند. بیشترین مقدار K چقدر است، به‌طوری‌که گزاره زیر همواره درست باشد؟

«حداقل K نفر در این گروه هستند که هم سن‌شان برابر و هم متولد یک شهر هستند.»

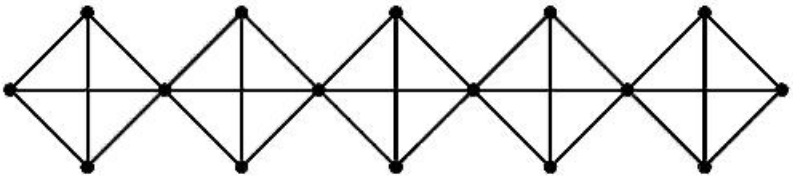
۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

۱۱۷- تعداد تطابق‌های کامل در گراف زیر چقدر است؟



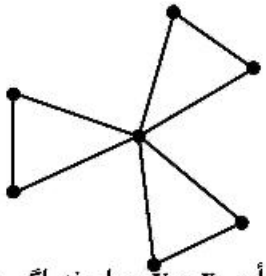
۱) ۲۷

۲) ۴۸

۳) ۸۱

۴) ۲۴۳

۱۱۸- به چند طریق می‌توان رئوس گراف زیر را با ۴ رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری‌که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند؟ (ممکن است از بعضی از رنگ‌ها استفاده نشود.)



۱) ۳۸۴

۲) ۴۸۶

۳) ۷۶۸

۴) ۸۶۴

۱۱۹- گراف G روی مجموعه رئوس $V=\{1,2,...,100\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود: دو رأس x و y مجاورند اگر و تنها اگر $1\le|x-y|\le 3$. حداقل چند یال به این گراف اضافه کنیم تا تبدیل به گرافی اویلری شود؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۱۲۰- چند درخت بدون برچسب از مرتبه ۱۰ وجود دارد، به‌طوری‌که درجه هر رأس آن برابر ۱ یا ۲ یا ۵ باشد؟

۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

۱۲۱- چند رابطه روی مجموعه $A=\{1,2,3\}$ می‌توان تعریف کرد که انعکاسی (بازتابی) نباشد، اما خاصیت پادتقارنی را داشته باشد؟

۱) ۲۷

۲) ۵۶

۳) ۱۸۹

۴) ۲۱۶

۱۲۲- به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ یکسان را در ۱۰ جعبهٔ متمایز قرار داد، به‌طوری‌که دقیقاً ۳ جعبه خالی بماند؟

۱) ۸۶۴۰۰

۲) ۱۰۰۸۰

۳) ۴۲۰۰

۴) ۲۶۴۰

۱۲۳- می‌خواهیم چهار زیر مجموعه متمایز A، B، C، D از زیر مجموعه‌های $z = \{1,2,\ldots,n\}$ انتخاب کنیم. اگر تعداد انتخاب‌ها با شرط $A \subseteq B \cup C \cup D$ برابر N_1، با شرط $A \cap B \subseteq C \cup D$ برابر N_2 و با شرط $A \cap B \cap C \subseteq D$ برابر N_3 باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (فرض کنید $n \geq 2$)

۱) $N_1 = N_2 = N_3$

۲) $N_1 < N_2 < N_3$

۳) $N_1 = N_3 \neq N_2$

۴) $N_1 > N_2 > N_3$

۱۲۴- اگر $a_0 = 3$ و $a_1 = 7$ و به ازای $n \geq 0$ رابطهٔ $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2$ برقرار باشد، حاصل عبارت $a_{10}^2 + 4a_9 - a_9\, a_{11}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۷

۱۲۵- می‌خواهیم از مبدأ مختصات به خط $x + y = 10$ برسیم. در هر گام یک واحد به طرف بالا یا یک واحد به سمت راست حرکت می‌کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است، مشروط بر آنکه نقطه پایانی روی هیچ‌یک از محورهای x و y واقع نباشد؟

۱) ۱۰۲۴

۲) ۵۱۲

۳) ۵۱۰

۴) ۱۰۲۲

۱۲۶- چند تصاعد حسابی به طول ۴ با قدر نسبت عدد صحیح دلخواه $d \geq 1$ در مجموعه $\{1,\ldots,35\}$ وجود دارد؟

۱) ۱۵۴

۲) ۱۶۵

۳) ۱۷۶

۴) ۱۸۷

۱۲۷- در دانشکده‌ای چهار سایت کامپیوتری کاملاً مشابه بدون هیچگونه علامت یا شماره‌ای وجود دارد. اگر هر سایت ظرفیت ۷ نفر را داشته باشد به چند روش می‌توان ۷ دانشجوی این دانشکده را در این ۴ سایت قرار داد؟ (ممکن است از ظرفیت یک سایت به‌طور کامل استفاده شود.)

۱) ۷۱۵

۲) ۶۵۲

۳) ۳۶۵

۴) ۳۵۰

۱۲۸- مجموعه $\{0,1\}^n$ شامل تمام رشته‌های به طول n با نمادهای ۰ و ۱ را در نظر می‌گیریم. برای i، $1 \le i \le n-1$ قرار می‌دهیم: $A_i = \{(x_1,\dots,x_n) \in \{0,1\}^n : x_i = 0 \ , \ x_{i+1} = 1\}$

مجموعه $\{0,1\}^{1399} - \bigcup_{1 \le i \le 1398} A_i$ چند عضو دارد؟

۱) 2^{1398}

۲) ۱۳۹۸

۳) ۱۴۰۰

۴) $2^{1397}+1$

۱۲۹- یک آموزشگاه دارای ۲۰ مربی شامل ۵ مربی سطح ۱، ۴ مربی سطح ۲، ۲ مربی سطح ۳ و ۹ مربی سطح ۴ است. به چند روش می‌توان یک گروه پنج نفره از مربی‌ها انتخاب کرد به‌طوری که از هر سطحی حداقل یک نفر در گروه حضور داشته باشد؟

۱) ۱۱۵۲

۲) ۲۸۸۰

۳) ۵۷۶۰

۴) ۷۲۰۰

۱۳۰- تعداد رشته‌هایی به‌طول ۲۰ با استفاده از نمادهای $\{0,1,2,3,4\}$ به‌طوری که مجموع تعداد صفرها و یک‌ها در آن زوج باشد برابر است با .....

۱) 5^{19}

۲) $\frac{5^{20}}{2}$

۳) 2×5^{19}

۴) $\frac{5^{20}+1}{2}$

۱۳۱- به چند روش می‌توان ۸ کتاب مختلف را در یک کتابخانه سه طبقه آرایش داد به‌طوری که هیچ طبقه‌ای خالی نباشد؟

۱) ۹۶۶

۲) ۵۷۹۶

۳) ۲۰۱۶۰

۴) ۸۴۶۷۲۰

۱۳۲- کدام گزینه نادرست است؟

۱) گراف ۳- منظمی وجود دارد که عدد همبندی یالی و رأسی آن برابر نباشند.

۲) گراف k_n را می‌توان به‌صورت اجتماع x گراف دو بخشی بیان کرد، اگر $n \le 2^k$.

۳) فرض کنیم G گراف دو بخشی x- منظم باشد که $k \ge 2$. در این‌صورت G پل ندارد.

۴) فرض کنیم G گراف ساده همبندی باشد که P_4 و C_3 زیرگراف القایی آن نیستند. دراین‌صورت G گراف کامل دو بخشی است.

۱۳۳- مقدار مجموع $\sum_{i=0}^{20}(-1)^i \binom{n}{i}\binom{n}{20-i}$ چقدر است؟

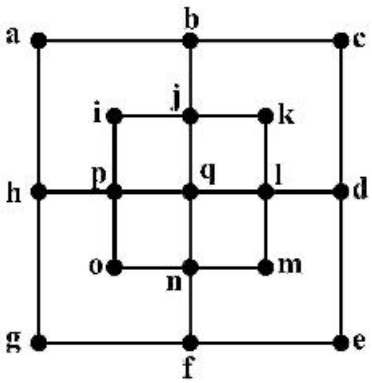
۱) صفر

۲) $2\binom{n}{10}$

۳) $\binom{n}{10}$

۴) $\binom{n}{10}\binom{n}{10}$

۱۳۴- کدام گزینه در مورد گراف زیر درست است؟



۱) اویلری نیست ـ همیلتونی نیست.

۲) اویلری نیست ـ همیلتونی هست.

۳) اویلری هست ـ همیلتونی نیست.

۴) اویلری هست ـ همیلتونی هست.

۱۳۵- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر G گراف ۲− همبند باشد که هیچ دور به طول زوج ندارد آن‌گاه G دور به طول فرد است.

۲) اگر G گراف ۲− همبند باشد و $P \subseteq G$ یک مسیر از u به v باشد آن‌گاه $G - E(P)$ شامل مسیری از u به v است.

۳) اگر G گراف ۲− همبند باشد و $x,y,z \in V(G)$ آن‌گاه مسیری از x به z شامل y وجود دارد.

۴) فرض کنیم v یک رأس از گراف ۲− همبند G باشد. در این‌صورت v همسایه‌ای مانند u دارد که $G - \{u,v\}$ همبند است.

@RayanAzmoon